Im dritten Sommer des furchtbaren Krieges, der die Völker Europas zerfleischt und in ihren Grundfesten erschüttert, ist der ausgezeichnete französische Mathematiker **Darboux**, der unserer Akademie seit 1899 angehörte, im Alter von 75 Jahren gestorben. Seine Arbeiten sind auf das engste mit der Entwicklung hervorragender Gebiete der Mathematik, namentlich aber mit der Lehre von den Differentialgleichungen und den Untersuchungen der Differentialgeometrie verknüpft. Eine Darlegung seiner Bedeutung würde verlangen, wenigstens seine Hauptwerke mit fortwährender Beziehung auf die Arbeiten seiner Zeitgenossen in Deutschland, England und Italien, die er stets mit der größten Aufmerksamkeit verfolgte, zu analysieren. Aber dafür steht hier weder der erforderliche Raum zu Gebote, noch würde eine solche Behandlung dem Zweck dieser Mitteilungen entsprechen, die zunächst bestimmt sind, auch weiteren Kreisen, als den ganz speziellen Fachgenossen, eine Übersicht über die Leistungen des Verstorbenen zu geben. Demgemäß beschränkt sich das Folgende darauf, das, was Darboux einen hervorragenden Platz in der Geschichte der Mathematik anweist, mehr in allgemeinen Umrissen hervorzuheben und nur gelegentlich auch Einzelheiten zu berühren.

Jean Gaston Darboux ist am 14. August 1842 in der durch ihre zahlreichen römischen Altertümer bekannten Stadt Nîmes im Département Gard geboren. Er trat nach seiner Erziehung an den Lyzeen zu Nîmes und Montpellier 1861 nach glänzend bestandenem Aufnahmeexamen in die École Normale zu Paris ein, aus der schon so viele treffliche Mathematiker hervorgegangen sind. Schon 1872 finden wir den ancien élève de l'École Normale dort als Professor der Mathematik am Lycée St. Louis-le-Grand und von 1867—1873 als suppléant seines Lehrers, des bekannten Mathematikers Joseph Bertrand am Collège de France. Nicht lange darauf wird er maître de conférences à l'École Normale und professeur suppléant de mécanique et de géométrie à la Faculté des Sciences. Im Jahre 1880 folgte er dem siebenundachtzigjährig verstorbenen Michel Chasles als Professor der géométrie supérieure an der Sorbonne, deren Doyen er seit 1889 war. 1884 wurde er an Stelle von V. Puiseux zum Mitgliede der Akademie zu Paris erwählt, deren beständiger Sekretär er seit 1890 war, und nahm so auch äußerlich eine hohe Stellung ein als membre du bureau des longitudes, in welcher Eigenschaft er seine Wohnung im Palais Mazarin dieses Institutes hatte. Viele Ehren und Ämter wurden ihm zuteil; er war Commandeur de la Légion d'honneur, président de section à l'École pratique des hautes études, seit 1889 membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique etc.

1870 gründete er mit Houël und J. Tannery das Bulletin des Sciences mathématiques, von dem bis jetzt über 50 Bände erschienen sind, unter den glänzenden Auspizien des aus Puiseux, Chasles, Bertrand, A. Serret bestehenden Comités, mit der Absicht, eine mathematische Zeitschrift in Frankreich zu schaffen, die sowohl Originalarbeiten als auch gediegene Referate über die Literatur der Gegenwart enthalten sollte. So entstand in dem Bulletin des zu Nîmes geborenen Darboux eine Fortsetzung der ersten eigentlich mathematischen Zeitschrift in Frankreich, der Annalen von Gergonne, welche von 1810—31 unter der Leitung des letzteren in Nîmes erschienen. Gleich der erste Band enthielt denn auch die Anzeige so hervorragender Schriften, wie Bertrands großer Calcul différentiel, G. Salmons Lessons on modern higher algebra, J. Plückers neue Geometrie des Raumes, Band I und II (herausgegeben von F. Klein), Imschenetzkys Arbeiten über partielle Differentialgleichungen, H. Hankels Untersuchung über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen, G. Zeuthens Theorie der Singularitäten der Raumkurven, E. B. Christoffels allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke, L. Cremonas Preliminari di una teoria geometrica delle superficie.

Darboux war Geometer im eigentlichen Sinne des Wortes. Er hat zwar sich nicht mit Untersuchungen über synthetische Geometrie, die gerade zurzeit seiner Jugend in Deutschland in hoher Blüte stand, beschäftigt (vielleicht ist hier die Arbeit Sur une classe particulière de surfaces reglées (Bull. II, S. 301, 1871)[1]) auszunehmen, obwohl auch diese vorzugsweise analytisch gehalten ist). Selbst da, wo er sich an der durch F. Klein hervorgerufenen Diskussion über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie beteiligt, ist der Kern seiner Überlegung, der freilich auch eine geometrische Deutung gegeben wird, analytisch durch den Satz bezeichnet: Die Funktionalgleichung Cauchys $\varphi(x)+\varphi(y)=\varphi(x+y)$, die für jedes rationale x unmittelbar $\varphi(x)=x\varphi(1)$ liefert, ist für jedes x gültig, falls nur $\varphi(x)$ in einem beliebigen Intervalle nur positive und negative Werte von endlichem Betrage besitzt.

Prinzipiell hat er immer die Richtung der Mongeschen Schule vertreten. So hoch er auch die Verdienste Chr. von Staudts um die selbständige Begründung der projektiven Geometrie und seine Konstruktion der imaginären Gebilde in derselben schätzte, schien ihm doch die analytische Richtung, die durch Poncelets Entdeckung der Kreispunkte, E. Laguerrés projektive Definition der Winkel mit Hilfe der Isotropen oder Minimalgeraden (1853, Oeuvres de L. I, S. 1) Vorzüge zu besitzen, die ihm die rein synthetische Forschung weniger sympathisch erscheinen ließen. Aber überall ist seine Analyse getragen von einer gewaltigen geometrischen Intuition, die es liebt, oft gerade an entscheidender Stelle die Rechnung durch eine geometrische Bemerkung zu fördern, während er an anderen Stellen erst nachher zeigt, wie die Grundgedanken seiner Analysis eigentlich nur eine andere Form einer geometrischen Idee bilden, die umgekehrt zu den ersteren hätte leiten müssen. Und dies unvergleichliche Talent, in dem er von keinem Mathematiker übertroffen ist, steigerte sich im Laufe der Jahre immer mehr, ohne an Fruchtbarkeit einzubüssen.

[1]) Bull. bedeutet Bulletin des sciences mathématiques.

In seinen ersten Arbeiten (von 1864 an) tritt noch eine rein geometrische Richtung auf, so in der frühesten über die Schnitte der Torusfläche, in der Konstruktion der Fläche zweiter Ordnung durch neun gegebene Punkte, in der Abbildung einer Fläche fünfter Ordnung auf die Ebene (1871), die im Anschluß an die Abhandlungen von A. Clebsch über die Abbildungen algebraischer Flächen (Math. Annalen I, 1868) erschien.

Aber auch schon während dieser Zeit steckt er sich die höchsten Ziele. Seine Arbeiten erstrecken sich über fast alle Gebiete der Mathematik (Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung etwa ausgenommen): über Funktionentheorie, Lehre von den Differentialgleichungen, Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, Kinematik und Mechanik, wenn auch die infinitesimalen Eigenschaften der Flächen dasjenige Gebiet bildeten, auf dem er vielleicht seine größten Erfolge erreicht hat. Die Ideen, welche er hier überall entwickelt, sind schon zum großen Teil in seiner Jugend, in den Jahren 1866—75 entstanden, während die völlige Ausführung ihn unausgesetzt bis zu seinem Tode beschäftigte.

Es soll nun versucht werden, wenigstens einige der hauptsächlichsten Arbeiten, die aus seiner überaus großen Produktivität entsprungen sind, zu besprechen.

Wenden wir uns zuerst zu denen funktionentheoretischen Inhaltes. In dem Mémoire sur les fonctions discontinues (Ann. de l'École Norm. (2), IV, S. 57, 1875) begründet Darboux in Verfolgung der Riemannschen Untersuchung über den

Begriff des bestimmten Integrals den wichtigen Satz, daß für jede zwischen den Grenzen a, b beschränkte Funktion $f(x)$ der Variabeln x ein oberes und ein unteres Integral existiert, indem er zeigt, daß die Summe

$$\Sigma (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

bei fortgesetzter Verkleinerung aller Intervalle, derart, daß sie sämtlich gegen Null konvergieren, falls man für die $f(\xi_i)$ die zu denselben gehörigen oberen Schranken der Funktion wählt, nicht mehr zunehmen kann und wirklich einen völlig bestimmten Grenzwert ergeben muß. An derselben Stelle wird auch die gleichmäßige Konvergenz unendlicher Reihen behandelt, die durch K. Weierstraß' Revision der Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung so wichtig geworden war; man verdankt da Darboux das beinahe klassisch gewordene Beispiel der Reihe

$$-2xe^{-x^2} = \sum_1^\infty -2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2},$$

welche nicht gleichmäßig konvergiert und nun auch bei gliedweiser Integration ein Resultat liefert, das vom Integral der doch von o bis x stetigen Funktion selbst verschieden ist. Die Arbeit enthält im Anschluß an Hankel's Untersuchungen auch die Darstellung von Funktionen, die in jedem noch so kleinen Intervalle keine Derivierte besitzen, unter anderem auch das Beispiel der stetigen Funktion

$$\Sigma \frac{\sin \overline{n+1}!\, x}{n!},$$

die für kein x eine Ableitung besitzt und viele andere wichtige Bemerkungen.

Auf die weiteren hierher gehörigen Arbeiten[1]) kann hier nur hingewiesen werden, so auf die Ergänzungen zu Dirichlet's großer Abhandlung über die Darstellung willkürlicher Funktionen der Kugelfläche durch Reihen nach Integralen von Kugelfunktionen (sur les séries, dont le terme général dépend de deux angles, J. v. Liouville (2) XIX, S. 1, 1874). Dagegen sei noch erwähnt die Ausdehnung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf die komplexen Funktionen eines reellen Arguments und die Form des Restes der Taylorschen Reihe, die sich von der allgemeinen Cauchy-Schlömilchschen Gestalt nur durch einen Faktor $|\lambda| < 1$ unterscheidet. Auch hier wird das Resultat, das Ch. Hermite mit Vorliebe in seinem Cours d'analyse verwendet, aus dem geometrischen Satze gewonnen, daß die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist und zur Reihenentwicklung vieler Ausdrücke verwandt (sur le développement en séries des fonctions d'une seule variable, J. v. Liouville (2) III, S. 291, 1876).

In der Note des Bulletin III, S. 307, 1872 macht Darboux darauf aufmerksam, daß der Beweis von Cauchy für die Existenz einer Wurzel der Gleichung n. Grades $f(z) = X + iY = o$ mit Hilfe des Minimums von $X^2 + Y^2$ eine Lücke habe, die nur durch die Berufung auf die Stetigkeit dieses Ausdruckes gehoben werden kann, die, wie Weierstraß gezeigt hatte, gesichert sein muß, wenn die Funktion ihre untere Schranke Null für einen Wert von $z = x + iy$ erreichen soll.

Auch algebraische und invariantentheoretische Fragen beschäftigten den jungen Darboux vielfach. Weierstraß und L. Kronecker (Werke I, S. 163; II, S. 233) hatten 1868 in den Berliner Monatsberichten die Äquivalenz von Schaaren quadratischer Formen und ihre kanonische Darstellung in grundlegenden Arbeiten behandelt. Dieselben Fragen nimmt Darboux 1874 in der Théorie algébrique des formes quadratiques (J. v. Liouville (2) XIX, S. 347) in einer durch die Anwendung geränderter Determinanten außerordentlich übersichtlich und elegant gewordenen Darstellung auf, welche zugleich eine Vereinfachung der abstrakteren Behandlung durch Weierstraß und Kronecker liefert.

Aus dem Umstande, daß Darboux mehrere Jahre hindurch Mechanik zu lehren hatte, ist eine ganze Reihe von

[1]) So z. B. die geometrische Studie über das Poissonsche Integral, das H. A. Schwarz so gründlich untersucht hatte, im Bulletin (2) IV, S. 126, 1880.

Arbeiten hervorgegangen. Sie sind mit wenigen Ausnahmen, wie z. B. die an Poisson's Bestimmung der Elektrizitätsverteilung auf zwei leitenden Kugeln sich anschließende, kinematischer Art oder beziehen sich auf allgemeine Begriffe der Mechanik. Von der letzteren Art sind die Arbeiten Sur le choc des corps et sur le frottement dans le choc des corps, welche sich durch große Klarheit in den dabei zu Grunde gelegten Hypothesen auszeichnen, ferner die Étude géometrique sur les percussions et le choc du corps im Bulletin (2) IV, 1880.

In der Note über die Zusammensetzung der Kräfte in der Statik untersucht er das Minimum der zu einem rein mathematischen Beweise des Parallelogramms der Kräfte erforderlichen Hypothesen. Setzt man voraus, daß die Resultante von n Vectoren $P_1, P_2 \ldots P_n$ a) eindeutig bestimmt ist, b) ungeändert bleibt, wenn man irgend welche Gruppen der P durch ihre Resultanten ersetzt, c) von der Lage gegen das Koordinatensystem unabhängig ist, so ist dieselbe vermöge der Parallelogrammregel durch

$$\varphi(P_1),\ \varphi(P_2)\ \ldots\ \varphi(P_n)$$

gegeben, mit $\varphi(x)$ als einer willkürlichen Funktion. Aus der weiteren Forderung, daß gleichgerichtete Vectoren sich addieren, $\varphi(P+Q)=\varphi(P)+\varphi(Q)$, folgt nach den oben erwähnten Voraussetzungen über die Funktion $\varphi(x)$[1], daß $\varphi(P)=A\cdot P$ sein muß.

Zwei andere Arbeiten, so schon in den Comptes Rendus von 1876 und in dem Mémoire sur l'équilibre astatique, betreffen Fragen, die bereits F. Minding und A. Möbius behandelt hatten, doch zeichnet sich auch hier die Darstellung von Darboux, abgesehen von manchen neuen Einzelheiten, durch Einheitlichkeit und Eleganz aus.

J. Bertrand hatte die Frage aufgeworfen, unter welchen Umständen sich allein aus der angenommenen Tatsache, daß die Planeten immer Kegelschnitte beschreiben, auf das Anziehungsgesetz schließen lasse. Unter Annahme einer Kräftefunktion bestimmt Darboux das Kraftgesetz, welches im allgemeinen von der Entfernung r und dem Polarwinkel φ abhängig sein kann, und das dazu gehörige System der Kegelschnitte. Unabhängig wird die Kraft von φ nur für den Fall des Newtonschen Gesetzes und dem der Proportionalität mit der Entfernung (Comptes Rendus, Bd. 84, 1877).

[1]) Siehe S. 28.

Einen ausgesprochenen kinematischen Charakter tragen die übrigen Arbeiten von Darboux. Wir erwähnen zuerst die geistreiche Idee, die Theorie des ebenen Vierecks aus vier gegebenen Seiten mit der einer Kurve dritter Ordnung und so mit der Theorie der elliptischen Funktionen in Verbindung zu setzen (1879) und die aus demselben Jahre stammenden Recherches sur un système articulé, die eine höchst elegante Geradführung enthalten, sowie die schöne Arbeit Sur le déplacement d'une figure invariable (École Norm. (3) VII, 1890), in der eine Bewegung des starren Körpers ermittelt wird, bei der alle Punkte desselben Ellipsen beschreiben und die merkwürdigerweise die einzige durch das Gleiten des Körpers auf einer Ebene herstellbare ist, bei der alle Punkte ebene Kurven in nicht parallelen Ebenen beschreiben.

Wir schließen diese kinematischen Untersuchungen mit der interessanten Arbeit Sur la sphère de rayon nul et sur la théorie du déplacement d'une figure invariable im Bulletin (2), XXIX, 1905. Hier wird die ganze Untersuchung auf die Betrachtung des Minimalkegels $X^2+Y^2+Z^2=o$, dessen Punkte durch

$$x=u^2+v^2,\ y=i(u^2-v^2),\ z=2uv$$

gegeben sind, zurückgeführt und abgesehen von manchen anderen interessanten Bemerkungen, wie z. B. der liniengeometrischen Identität, welche die algebraische Summe der drei aus den Produkten der Gegenkanten eines in die Nullkugel eingeschriebenen Tetraeders darstellt, soweit durchgeführt, daß schließlich die Formeln für die orthogonalen Substitutionen im R_3 und die Zusammensetzung zweier Rotationen durch die

Quaternionenformel von A. Cayley entstehen; wie man sieht, gibt diese Arbeit eine etwas andere Darstellung, als die von F. Klein in seiner Theorie des Kreisels aus dem Jahre 1897, S. 23 ff.

Die Theorie der Differentialgleichungen zu der wir jetzt übergehen, verdankt Darboux fast in allen ihren Teilen erhebliche Fortschritte. Wir betrachten zuerst die gewöhnlichen Differentialgleichungen. Eine der frühesten Arbeiten ist hier die Lösung der elliptischen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{\Delta(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\Delta(y)}}; \quad \Delta(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

(École Norm. IV, S. 81, 1867). Zur Lösung derselben bestimmt er die Beziehung zwischen irgend zwei Integralen der Gleichung

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\Delta(x)};$$

sie ergibt sich sogleich durch Vergleichung mit der aus dieser durch Differentiation gewonnenen weit einfacher als durch Lagranges berühmte Integration.

Betrachten wir jetzt zunächst die gewöhnlichen Differentialgleichungen: Ist $f(x,y,y') = D_n^1$ eine (algebraische) Differentialgleichung erster Ordnung n. Grades, so können außer dem allgemeinen Integral $F(x\,y\,c) = o$ noch singuläre Lösungen auftreten, für die nach Lagrange $\frac{df}{dy'} = o$ ist. Daran knüpften sich die beiden Fragen: Wann ist eine Lösung singulär in dem Sinne, daß sie durch keinen Wert der Konstanten c aus dem allgemeinen Integral folgt, und warum existiert die singuläre Lösung nicht „im allgemeinen", während doch die Enveloppe eines Ausdruckes von der Form $F(x\,y\,c) = o$ gerade „im allgemeinen" vorhanden ist? Die erste läßt sich in jedem einzelnen Falle sicher entscheiden und ist von geringerer Bedeutung; in der zweiten glaubte man ein Paradoxon zu sehen, weil man nicht bedachte, daß die Lösung der allgemein gedachten $D_n^1 = o$ eine Form von weit speziellerem Charakter ist, wie eine allgemeine Gleichung $F(x\,y\,c) = o$, welche die Konstante c ebenfalls im n. Grade enthält. Aber Darboux hat zuerst — so schon 1870 in Mitteilungen an die Pariser Akademie — ausgesprochen, daß die allgemeine $D_n^1 = o$ kein singuläres Integral haben kann. Er zeigt weiter (Bull. IV, S. 158, 1873), daß das durch Lagranges Regel aus $\frac{df}{dy'} = o$ und $f = o$ gebildete Eliminationsresultat, der sogenannte Discriminantenort, im allgemeinen Falle keine Lösung, sondern den Ort von Spitzen der Integralkurven liefert. Der Beweis dafür wird nicht durch Reihenentwicklung, sondern durch die dualistische Auffassung der D_n^1, wie sie die Theorie der Konnexe von Clebsch nahe gelegt hatte, geführt. Durch jeden Punkt gehen n Integralkurven (System S), und jede Gerade g, $y = ax + C$, wird von m Kurven S in den Schnittpunkten von g mit $f(x, y, a) = o$ berührt. Bei der Umformung von S durch Polarität entsteht das System S', in dem jede Gerade n Kurven desselben berührt und dem wieder eine D_n^1 in Linienkoordinaten entspricht. Dem Zusammenfallen von zweien dieser Berührpunkte entspricht, wie Darboux zeigt, eine einfache Inflexion, die nun für die Kurven S eine Spitze bedingt. Zugleich werden die Bedingungen angegeben, unter denen man aus Lagranges Kriterium für die singuläre Lösung (Calcul des fonctions, Werke X, S. 203)

$$f = o, \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = o, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = o$$

auf ihre Existenz schließen kann.[1])

---

[1]) In der deutschen Bearbeitung des Lehrbuches von A. R. Forsyth S. 41 wird bemerkt, daß Cayley zuerst die singulären Lösungen behandelt habe. Nach den obigen Angaben trifft das nicht zu. An derselben Stelle wird angegeben, daß Darboux das sogenannte Paradoxon der singulären Lösungen noch nicht erkannt habe. Demgegenüber vergleiche man seine bestimmten Aussagen im Bulletin, sowie insbesondere in den Solutions singulières S. 213 von 1883. Hiernach dürfte ihm die Priorität zukommen. Nach P. Painlevé (Enzyklopädie d. M. II, S. 213) hat Cayley bereits im Phil. Magazine XXXII, S. 379, 1866, sich mit den

Eine weitere Arbeit (Bull. 2, II, 1878) knüpft an Jacobis Integration der Differentialgleichung[1])

$$\begin{vmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = o$$

mit L, M, N als homogenen linearen ganzen Funktionen von x, y, z an und erweitert sie im Sinne der Invariantentheorie für den Fall, daß L, M, N ganze homogene Funktionen gleichen Grades sind. Hier wird namentlich die Frage nach dem Auftreten von algebraischen Integralen und ihrer Form beantwortet, die bei Jacobi unmittelbar aus der Beschaffenheit der Wurzeln einer kubischen Gleichung folgt.

Eine umfangreiche Abhandlung (J. v. Liouville 4, III, S. 305), deren Anfänge schon aus dem Jahre 1876 stammen, betrifft die Lösung von Differentialgleichungen der Form

singulären Lösungen beschäftigt; diese Note enthält aber nichts darüber; Cayley hat auch nicht bemerkt, daß das, was er 1873 in der populär geschriebenen Note im Mess. of Math. (Coll. Papers VIII, S. 529) den Discriminant-Locus nennt, im allgemeinen Spitzenort ist. Aber seine gesperrt gedruckten Worte am Ende der Note „I do not recognise any singular solution, which is not of the envelope species" haben wohl zum richtigen Verständnis dieser Lösungen beigetragen. Eine Reihenentwicklung, welche zeigt, daß die singuläre Lösung in jedem ihrer Punkte von einer Integralkurve berührt wird, hat É. Picard erst 1896 im Traité d'analyse III, S. 44, gegeben, eine erschöpfende Theorie der $D_n^1 = v$ findet sich in der großen Arbeit von M. Hamburger (J. f. Math. CXII, S. 205).

Es mag hier indessen noch bemerkt werden, daß M. Cournot (Théorie des fonctions II, S. 324 ff., 2. Ausgabe 1857) bereits an einem speziellen Beispiele zeigt, wie der Discriminantenort sowohl zu Spitzen der Integralkurven Veranlassung geben kann, als auch zu einer singulären Lösung, während es sich bei Darboux um einen allgemeinen Satz handelt. Das Auftreten von Spitzen ist übrigens — wenn man reelle Verhältnisse betrachtet, bei denen zwei Wurzeln der Gleichung für y' beim Durchgang durch den Discriminantenort von reellen zu imaginären „im allgemeinen" übergehen — nicht so wunderbar.

[1]) Von Jacobi (Werke IV, S. 257, 1892) werden homogene Koordinaten noch nicht benutzt.

$$f(dx_1\, dx_2 \,.\,.\, dx_n) = o,$$

d. h. einer in den dx homogenen Form f mit konstanten Koeffizienten, mit denen für die Fälle $n = 2, 3$ sich schon Euler und A. Serret beschäftigt hatten. Hier ermittelt Darboux durch geschickte Verallgemeinerung des aus geometrischen Gesichtspunkten für $n = 2, 3$ gelösten Problems die von Quadraturen freie Lösung. Damit finden zugleich andere Aufgaben ihre Beantwortung, so z. B. die explizite Konstruktion von Kurven, die mit gleichen Bogenlängen für entsprechende Punkte korrespondieren, ferner die Bestimmung aller Bewegungen, die auf unendlich kleinen Rotationen beruhen, sowie auch die allgemeine quadraturfreie Darstellung für zwei auf einander abwickelbare Regelflächen etc.[1])

Aber weit bedeutender sind Darboux' Arbeiten über partielle Differentialgleichungen.

Cauchy hatte schon seit 1831 in den Comptes Rendus, namentlich aber daselbst 1842 mit Hilfe seines calcul des limites die Existenz der Lösungen von Systemen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen in der allgemeinsten Weise erwiesen. Aber zu vollem Verständnis sind diese grundlegenden Untersuchungen wohl erst seit 1856 gelangt, wo Briot und Bouquet dieselben in vereinfachter Gestalt für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen gaben. Und nun erkannte Darboux, daß der von ihnen betretene Weg auch für partielle Differentialgleichungen mit beliebig vielen Variabeln sich beibehalten lasse und seine Darstellung (C. R. LXXX, 1875) ist jedenfalls wegen ihrer Einfachheit sehr bemerkenswert, wenn sie auch von S. v. Kowalewskis zu derselben Zeit (J. f. Math. 80, S. 1) erschienenen Arbeit an Allgemeinheit übertroffen wird.

Doch weit wichtiger als diese formale Arbeit ist die Note über die Auflösung partieller Differentialgleichungen, die er

[1]) Es seien hier noch die Darboux eigentümlichen Algorithmen aus den Integralen linearer Differentialgleichungen n. Ordnung und ihrer Lagrangeschen Adjungierten, Leçons sur la théorie générale des surfaces II, S. 99 ff. erwähnt.

im Band VII der École Normale bereits 1870 veröffentlichte. Der Grundgedanke dieser „Darbouxschen Methode“ ist etwa folgender. Nach Ampère und Cauchy läßt sich die Lösung der $D_1 = o = f(x, y, z, p, q)$ durch Einführung einer Variabeln y_0, derart, daß y Funktion von x, y_0 wird, auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das der Charakteristiken der $D_1 = o$ zurückführen. Bei der Gleichung $D_2 = f(x, y, z, p, q, r, s, t) = o$ erhält man — von besonderen Fällen abgesehen — aber wie Darboux zeigt, zur Bestimmung der vier Unbekannten y, z, p, q nur drei von y_0 unabhängige Differentialgleichungen, und dies wiederholt sich auch dann, wenn man von den r, s, t zu den höheren Derivisten übergeht, so daß ein prinzipieller Unterschied zwischen den D_1 und D_n stattfindet. Kann man aber, wie bei den Mongeschen Gleichungen integrable Kombinationen dieses unvollständigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen finden, so gelingt die vollständige Integration (insbesondere dann, wenn zwei solche vorhanden sind). Nun faßt Darboux den kühnen Gedanken, die analogen Gleichungen, welche nur Ableitungen der Unbekannten nach x enthalten, aufzusuchen, wenn man zu den höheren Differentialquotienten von z übergeht, d. h. im Sinne des durch S. Lie eingeführten Ausdruckes die höheren Flächenelemente x, y, z, p, q, r, s, t usw. an Stelle der bisher verwandten x, y, z, p, q einzuführen. Ergeben sich hier integrable Kombinationen, so kann die Integration gelingen. Dabei treten aber neue Differentialgleichungen auf, die mit der gegebenen Integrale von besonderer Natur gemein haben müssen, deren weitere Betrachtung sich hier nicht beschreiben läßt. Darboux hat schon 1870 im Prinzip seine Methode auf alle $D_n = o$ ausgedehnt, aber nichts weiter über sie veröffentlicht. Von S. Lie und M. Lévy und vielen anderen ist sie aber weiter entwickelt, so daß z. B. E. Goursat einen großen Teil des Band II seiner Équations à dérivées partielles du second ordre diesem Gegenstande widmen konnte.

Wir kommen jetzt zu der Arbeit Sur le problème de Pfaff (Bull. 2, VI, S. 14 u. 49, 1882). Sie verfolgt denselben Zweck wie die von G. Frobenius (J. f. Math. LXXXII, S. 230, 1877) erschienene, welche die Transformation der Differentialausdrücke von der Form

$$\Theta_d = \Sigma X_i \, dx_i$$

auf ihre kanonischen Formen vollständig erledigte. Aber die geistreiche Art, in der Darboux mit Hilfe der bilinearen Kovariante[1])

$$\delta \Theta_d - d \Theta_\delta$$

(die auch bei Frobenius auftritt) und des aus ihr folgenden invarianten Systems von Differentialgleichungen fast ohne jede Rechnung die Frage erledigt, ist von großem Interesse. In dem zweiten Teile des Aufsatzes verwendet Darboux dieselben Gesichtspunkte unter Zuziehung der oben (S. 31) erwähnten Arbeit über quadratische Formen, um die Hauptsätze von Lies Theorie der Berührungstransformationen auf einem neuen Wege zu entwickeln.

Dies war offenbar die Vorarbeit für die große 240 Seiten umfassende Arbeit Sur les solutions singulières des équations à dérivées partielles du premier ordre, die 1883 im Band XXVII der Mém. des Savants étrangers erschien und für den er den grand prix der Akademie erhielt. Diese Monographie, welche im Jahrbuch für die Fortschritte der Mathematik nicht einmal erwähnt ist, enthält eine Fülle wichtiger und neuer Gedanken neben den allgemeinen seit Lagrange, Monge und Cauchy bekannten Grundlagen. Wir rechnen dahin a) rein geometrische Resultate, wie z. B. die Frage nach den durch ein System von Kurven erzeugten Flächen, die entweder vom

---

1) Darboux' Arbeit ist wohl ganz unabhängig von Frobenius entstanden. Denn das Variationsprinzip, das zur bilinearen Kovariante führt, kannte er sicher aus E. B. Christoffels Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (J. f. Math. LXX, S. 46) (oder auch aus R. Lipschitz' gleichzeitiger Abhandlung über denselben Gegenstand), welche für $n = 2$ die Frage nach der Isometrie von zwei Flächen enthält. Dieser Fall ist übrigens von Darboux selbst in der elegantesten Weise in den Leçons sur la théorie générale III, S. 223, behandelt.

Typus der Regelflächen oder der Developpabeln sind (S. 40), b) die Verallgemeinerung der konjugierten Kurven Dupins (S. 58), c) dann die elegante Darstellung der Mayer-Lieschen Theorie der Berührungstransformationen unter Benutzung des Variationsprinzipes (S. 80), d) die ganz allgemeine Darstellung der Charakteristiken und der Methode Cauchys vermöge der doppelten Symbole d und δ, wobei auch die Einwürfe Bertrands gegen die Allgemeingültigkeit des Verfahrens widerlegt werden (S. 133), was A. Serret z. B. nur umständlich (École Norm. 1, III, S. 145) erreicht hatte, endlich die Bestimmung des Verhaltens der Charakteristiken und Integralflächen in Bezug auf den Discriminantenort.

Bezeichnet man mit Z, P, Q, U, V für die Gleichung $f(x, y, z, p, q) = o$ die Ausdrücke $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, $\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}$, so ergibt sich (S. 146 ff.), daß die Charakteristiken in den Punkten des Discriminantenortes (wo $P = Q = o$, U und V nicht Null sind) im allgemeinen Spitzen[1]) haben, die charakteristische Developpable dagegen regulär ist (diesem Falle steht dualistisch der andere $U = V = o$, P und Q nicht Null, gegenüber). Im Zusammenhange damit werden dann auch die Formen der Integralflächen in der Umgebung des Discriminantenortes untersucht und zu diesen wichtigen Ergebnissen werden von S. 172 an noch die über das Verhalten der Integralflächen in der Nähe der singulären Lösung, welche für $Z = o$, $P = Q = U = V = o$ sicher existiert, wo dann nach allen Punkten der Tangentenebene Charakteristiken ohne Singularität auslaufen (S. 152), untersucht und dies auch für n unabhängige Variable durchgeführt.

Endlich sei noch hervorgehoben, daß der jetzige Begriff des allgemeinen Integrals einer partiellen Differentialgleichung ebenfalls von Darboux zuerst vertreten ist. Nach A. Ampère muß dasselbe nur dieser und allen aus ihr durch Differentiation folgenden Gleichungen genügen. Darboux verlangt aber mit Recht, daß dasselbe den aus Cauchys Existenzbeweisen folgenden Forderungen genüge, also z. B. das allgemeine Integral einer $D_2 = o$ mit zwei unabhängigen Variabeln x, y durch einen willkürlichen Streifen gelegt werden könne. Daß darin ein Unterschied liegt, der geradezu irrtümliche Behauptungen veranlassen kann, bemerkt er in den Leçons sur la théorie générale II, S. 98, mit besonderem Nachdrucke aber auf dem Mathematikerkongreß zu Rom (Bull. 2, XXXII, S. 118 und 124).

Wir wenden uns nun endlich zu Darboux' Arbeiten in der Flächentheorie, dem Gebiet, auf dem er wohl seine größten Erfolge erreicht hat, müssen uns aber bei der Fülle des Stoffes auf einige kurze Angaben beschränken.

Schon im Jahre 1864 (Comptes Rendus LIX, S. 240) zeigt er, daß man auf jeder Fläche eine (imaginäre) Krümmungslinie vermöge der Gleichung $1 + p^2 + q^2 = o$ finden kann. Zugleich erkennen wir aus der anschließenden Bestimmung eines aus Cykliden gebildeten dreifachen Orthogonalsystems, wie angelegentlich er sich schon damals mit diesen Systemen, welche wir der Kürze halber als Lamé-Systeme bezeichnen, beschäftigte. Und nun folgt im Jahre 1866 (Ann. de l'École Norm. 1, III, Sur les surfaces orthogonales in der thèse de doctorat) der berühmte Satz, daß die Flächen eines Lamé-Systems einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung (notwendig und hinreichend) genügen müssen, den eine frühere Bemerkung von O. Bonnet (1862) doch eigentlich nur wahrscheinlich gemacht hatte (vgl. Darboux' eigene Angaben in den Leçons sur les systèmes orthogonaux, S. 13). Er gewinnt das Resultat auf dem einfachsten Wege, nämlich aus der Integrabilitätsbedingung des Differentialausdruckes

$$Pdx + Qdy + Rdz,$$

aber die entscheidende Wendung führt er damals auf seine

[1]) Damit gab Darboux also die Verallgemeinerung seines oben (S. 35) erwähnten Satzes über gewöhnliche Differentialgleichungen für den Raum.

Umkehrung des Dupinschen Theorems zurück, nach der zu zwei Flächenscharen, die sich rechtwinklig in Kurven schneiden, welche für die eine Schar Krümmungslinien sind, immer eine dritte Schar von Orthogonalflächen existiert.[1])

Und schon in dem C. R. LXIX, 1869,[2]) in der Notiz Sur une nouvelle série des systèmes orthogonaux algébriques gibt er den Satz, daß man aus jedem n-fachen Lamé-System n-k-fache solche Systeme herleiten kann. Auch hier beruht das auf der Bemerkung, daß man durch Gauß' sphärische Abbildung der Fläche eines dreifachen Systems auf die Kugel ein Orthogonalnetz auf der letzteren erhält, eine geometrische Konstruktion, die er dann in die Sprache der Analysis übersetzt. Und die Theorie der elliptischen Koordinaten von Jacobi (Werke, Supplementband S. 198, 1842/43) setzt ihn nun in den Stand, in Verbindung mit seiner Methode der pentasphärischen Koordinaten, aus Cykliden, d. h. Flächen 4. Ordnung, die den imaginären Kreis zur Doppelkurve haben, bestehende Lamé-Systeme aufzustellen. Die diesem speziellen Gegenstande angehörenden Untersuchungen finden sich dann vereinigt in dem (schon 1869 der Pariser Akademie vorgelegten) umfangreichen Mémoire Sur une classe de courbes et surfaces algébriques, das auch selbständig erschienen 1896 eine zweite Auflage erhielt. Aber neben den schönen Untersuchungen auf Grund des Imaginären, das durch S. Lies Entdeckung der Transformation der Liniengeometrie in eine Geometrie der Kugeln Darboux' größtes Interesse erregt hatte, findet sich hier 1872 auch schon die Entwicklung der von Quadraturen freien Gleichungen der Minimalkurven, sowie die in der elegantesten Weise mit Hilfe der Theorie der Differentialparameter, welche E. Beltrami 1869 veröffentlicht hatte, aufgestellte partielle Differentialgleichung, von der die Bestimmung aller Flächen abhängt, die auf eine gegebene

[1]) In den Leçons orthogonaux, S. 6, wird der Satz unter alleiniger Benutzung der Integrabilitätsbedingung erhalten.

[2]) C. R. bedeutet Comptes Rendus.

„abwickelbar" sind, für den allgemeinsten Fall des Längenelementes (Sur une classe remarquable, S. 17 und 181).[1])

Durch das Problem der Lamé-Systeme und der isometrischen Deformation der Flächen sind nun hauptsächlich die Aufgaben bezeichnet, denen Darboux von da an seine ganze Kraft widmete.

Die partielle $D_3 = o$ der Lamé-Systeme hatte er 1866 nicht selbst angegeben, weil sie bei direkter Ausrechnung weitläufig war; wahrscheinlich hat er sie damals nur in einer primitiven Form besessen. Es ist das Verdienst von A. Cayley, dieselbe durch eine Untersuchung, in der sich eine infinitesimal-geometrische Betrachtung mit großer algebraischer Kunst verbindet, in Gestalt einer sechsreihigen Determinante 1872 (vgl. den Zusatz 1873 in den Collected Papers of Cayley VIII, S. 292) ermittelt zu haben.[2])

Diese Differentialgleichung entwickelt nun Darboux später auf viel einfachere Weise, so z. B. im C. R. 76 und Ann. École Norm. 2 VII, in Gestalt einer sechsreihigen Funktionaldeterminante, fortwährend neue Anwendungen derselben hinzufügend, so z. B. in der Arbeit Sur les systèmes orthogonaux, qui comprennent une famille des systèmes du 2. degré, C. R. LXXXIV, S. 336, 1877, wo eine Lösung dieser Frage gegeben wird, bei der die Flächen zweiten Grades als Parameter eine

[1]) Auf ganz anderem Wege U. Dini im Giornale di matematiche II, S. 282, 1864.

[2]) Cayley sagt übrigens C. R LXXV, 1872 (Coll. Papers VIII, S. 269): On sait, que ϱ satisfait à une équation à différences du 3. ordre, et en suivant la route tracée par Maurice Lévy 1870 je suis parvenu à trouver cette équation. In der Tat hat Lévy sich schon seit 1867 mit dem Probleme der Laméschen Systeme beschäftigt. In seiner Arbeit (J. de l'École Polyt. cahier 43, S. 148, 1870) wird durch eine infinitesimale geometrische Konstruktion an zwei unendlich benachbarten Flächen einer Schar der Satz gewonnen: „Pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un systemème orthogonal, il faut et il suffit, qu'elle remplisse les conditions suivantes", deren sich eben Cayley bediente. So groß aber auch die sonstigen Verdienste Lévys sind, der sich vielfach mit denselben Problemen wie Darboux beschäftigte, die Priorität bleibt auch hier dem letzteren gewahrt.

willkürliche Funktion von einer Variabeln und dem Differentialquotienten derselben enthalten,[1]) z. B. Paraboloide von der Form

$$\frac{y^2}{a+u} + \frac{z^2}{a-u} = 2x + a \log u$$

sind. Im Zusammenhang mit diesen Arbeiten beschäftigt ihn wiederholt das Problem der sphärischen Abbildung, alle Flächen zu finden, für die das sphärische Bild der Krümmungslinien ein auf der Kugel gegebenes Orthogonalsystem ist. In den C. R. 96, S. 366 wird dasselbe auf die Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\zeta}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial^2 \sqrt{\lambda}}{\partial\alpha\partial\beta},$$

wo λ bekannt ist, zurückgeführt, und es zeigt wie sich aus einer Lösung derselben eine unbegrenzte Zahl neuer finden läßt.

Bald nach 1880 nehmen die Untersuchungen von Darboux eine etwas andere Richtung an. Die schöne Entdeckung des italienischen Mathematikers L. Bianchi (Math. Annalen XVI, S. 577, 1879) aus jeder Fläche konstanter negativer Krümmung ∞^1 neue von derselben Krümmung zu gewinnen, in dem man den zweiten Brennmantel der aus den Tangenten eines Systems paralleler, d. h. von einem unendlich fernen Punkte der Fläche ausgehender geodätischer Linien gebildeten Kongruenz bestimmt und die daran anschließende Bemerkung von S. Lie, daß man auf diesem Wege Flächen konstanter negativer Krümmung mit beliebig vielen Parametern durch Quadratur finden kann, veranlaßte weitere Bemühungen um das bis dahin so spröde Problem der Flächen konstanter Krümmung, welches durch F. Klein's und E. Beltrami's Arbeiten über Nicht-Enklidische Geometrie so viel Interesse erregten.

Andererseits hatte Darboux von 1882—1885 eine große Vorlesung über Flächentheorie an der Sorbonne gehalten, mit dem hauptsächlichen Zwecke, dabei neue Anwendungen für die Integration partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung geben zu können. Damit beginnt denn nun das Studium der Deformation der Flächen; dem die weiteren Arbeiten von Darboux zum großen Teil gewidmet sind. Eines der hervorragendsten Resultate bringt bereits der dritte Band der Leçons sur la théorie générale des surfaces, S. 362, nämlich die Bestimmung aller Flächen, welche zum Rotationsparaboloid isometrisch sind. So elegant auch hier schon die Darstellung geworden ist, hat doch Darboux später (Bull. 2, XXIX, S. 109, 1905) sie noch einmal in vereinfachter Gestalt behandelt, um die vollständige Flächengruppe zu erhalten, welche reell auf den reellen Teil des Paraboloides

$$x^2 + y^2 = 4kz$$

„abwickelbar" ist, während sich zugleich auch die zu den imaginären Teilen dieser Fläche isometrischen Flächen ergeben. Insbesondere findet er dabei auch zwei unicursale Flächen 12. Ordnung, 10. Klasse und veranlaßte E. Estanave, dieselben zu modellieren und ihre Herstellung eingehend zu erläutern (Bull. a. a. O. S. 246).

Doch wir haben damit dem Inhalt des vierbändigen großen in den Jahren 1887—96 veröffentlichten Hauptwerkes von Darboux, den Leçons sur la théorie générale des surfaces bereits vorgegriffen. Diese Leçons geben eine vollständige Einsicht in den bis zu dieser Zeit erreichten Zustand der Differentialgeometrie der Kurven und Flächen. Aber auch da, wo Darboux bereits bekanntes mitteilt, weiß er immer überraschende neue Wege zu gehen, so die Darstellung aus einem Gusse gestaltend. Man weiß in der Tat nicht, was man mehr bewundern soll, die außerordentliche Klarheit und Schönheit der Exposition oder die Vielseitigkeit und Tragweite der Methoden, durch die es gelingt, oft schwierige Fragen wie spielend zu erledigen. Das Werk scheint, wie Julius Weingarten, der um die Deformationslehre der Flächen so hoch verdiente deutsche Mathematiker sagt, „bestimmt, auf lange Zeit hinaus die Schritte der Geometer zu leiten".

[1]) Merkwürdigerweise enthält das Resultat gerade das confocale System der F_2 nicht.

Der formalen Darstellung liegt ein kinematischer Gesichtspunkt zu Grunde, der sich namentlich bei den Untersuchungen des dritten und vierten Bandes über geodätische Linien und das Rollen einer Fläche auf einer anderen als fruchtbar erwies, durch den Darboux die Mängel, welche der Verwendung eines willkürlichen kartesischen Koordinatensystems wegen seines fehlenden Zusammenhangs mit dem zu betrachtenden Objekte anhaften, zu beseitigen beabsichtigte. Doch mag hier hervorgehoben werden, daß durch die Arbeiten des italienischen Mathematikers E. Cesàro während derselben Zeit und dessen 1896 erschienenen Lezioni di geometria intrinseca (deutsch von G. Kowalewski, 1901) diese Frage eine vielleicht noch eingreifendere Umbildung erhalten hat.

Indessen dürfen wir es uns nicht versagen, einiges aus dem reichen Inhalt der Leçons hier anzuführen. Gleich im ersten Bande befindet sich eine ausgezeichnet schöne Darstellung der homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten in der Theorie der konjugierten Kurven (insbesondere der Krümmungslinien und der sich selbst konjugierten Haupttangenten- oder asymptotischen Kurven) auf der Fläche in Verbindung mit der Laplaceschen linearen $D_2 = o$

$$\frac{\partial_z^2}{\partial u \partial v} + A\frac{\partial z}{\partial u} + B\frac{\partial z}{\partial v} + Cz + D = o,$$

deren Betrachtung dem ganzen Werke ein so charakteristisches Gepräge verleiht. Daran schließt sich das System der pentasphärischen Koordinaten und seine Verwendung zur Bestimmung dreifacher Orthogonalsysteme, insbesondere solcher, die mit Darboux' Untersuchungen über Cykliden, über die bereits S. 41 berichtet wurde, zusammenhängen, sowie die Liesche Transformation des Linienraums in den von sämtlichen Kugeln gebildeten, bei denen die Kurven der Haupttangenten in Krümmungslinien übergehen, eine Entdeckung seines Freundes, der Darboux einen besonders hohen Wert beilegte. Der übrige Teil des ersten Buches ist hauptsächlich der Theorie der Minimalflächen gewidmet, welche durch Lie's überraschend einfache Konstruktion derselben durch Translation einer Minimalkurve längs einer andern eine so großartige synthetische und analytische Ausbildung erhalten hatte. Auch hier wird man überall neues finden; so wird namentlich das Problem, alle algebraischen Minimalflächen zu bestimmen, die einer gegebenen algebraischen Developpabeln eingeschrieben sind, allgemein gelöst, während Lie selbst dabei noch eine partikuläre Lösung als bekannt vorauszusetzen sich genötigt gesehen hatte.

Der zweite Band ist fast ganz der Theorie der schon erwähnten hyperbolischen $D_2 = o$ gewidmet. Laplace hatte bereits 1773 (Oeuvres, IX, S. 1) mit kühnem Vorstoß die Form der Lösungen mit Hilfe der von ihm eingeführten Kaskadenmethode und für die daran sich knüpfenden Hauptfragen nach der Möglichkeit, durch endliche Ausdrücke die Lösungen zu erhalten, die Grundzüge entwickelt. Aber Darboux blieb es vorbehalten, diese Methode der Kaskaden durch die geometrische Theorie der Kurvenkongruenzen völlig durchsichtig zu machen, in den beiden Invarianten h und k der Gleichung, deren Werte er mit großem Geschick durch alle Transformationen der Gleichung zu verfolgen versteht, die wesentlichen Funktionen zu erkennen und so in den Fällen, wo überhaupt endliche Lösungen möglich sind, also für eine der transformierten Gleichung eine Invariante verschwindet, in expliziter Form diese Lösungen zu ermitteln. Sie geben nun zu mannigfaltigen Anwendungen auf geometrische Probleme Veranlassung, insbesondere für den Fall gleicher Invarianten.[1])

Der dritte Band enthält zunächst in großartiger Vollständigkeit die Theorie der geodätischen Linien und der Linien konstanter geodätischer Krümmung, welche Darboux in Abweichung von einem durch Gauß in den Disquisitiones eingeführtem Ausdruck als geodätische Kreise bezeichnet. Es

[1]) In diesem Buche hat Darboux die wichtigen Arbeiten seines Schwiegervaters Th. Moutard über die Laplacesche $D_2 = o$, welche 1870 in den Wirren der Commune vernichtet und nur als kurze Anzeigen in den C. R. vorhanden waren, der Vergessenheit entrissen.

sei hier noch daran erinnert, daß er schon im Jahre 1870 in den Annales de l'École Normale VII, S. 175 auf weitere Verallgemeinerungen des Begriffes der geodätischen Linien hingewiesen hatte.

Dann wendet sich Darboux zu der Theorie der Flächen konstanter negativer Krümmung, von denen schon oben (S. 44) die Rede war. Hier werden die Transformationen von Bianchi, Lie und die ganz unabhängig davon entstandene des schwedischen Mathematikers A. V. Bäcklund im Zusammenhang mit A. Ribaucours Untersuchungen über cyklische Systeme dargelegt, welche gestatten aus einer Fläche dieser Art solche mit beliebig vielen Parametern zu erhalten. Bekanntlich handelt es sich bei der Bestimmung dieser Flächen um die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} = \sin 2\omega.$$

Aber indem Darboux an Stelle von Lies Transformation die Gleichungen ansetzt

$$\frac{\partial(\Theta+\omega)}{\partial\alpha} = a\sin(\Theta-\omega)$$

$$\frac{\partial(\Theta-\omega)}{\partial\beta} = \frac{1}{a}\sin(\Theta+\omega),$$

deren Integratilitätsbedingung wegen der voranstehenden erfüllt ist und für Θ wieder dieselbe Gleichung wie für ω liefert, wird seine Darstellung ganz besonders einfach. Er kann sogar zeigen, daß falls man zwei Riccatische Gleichungen vollständig integriert hat, die Fortsetzung der Bianchischen Transformation, welche bei Lie noch beliebig viele Quadraturen erforderte, nur auf algebraische Rechnungen hinausläuft.

Der 1895/96 erschienene vierte Band betrifft zunächst die infinitesimale Deformation der Flächen, d. h. die Lösung der totalen Differentialgleichung

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = o$$

in der x, y, z gegebene Funktionen von zwei Parametern sind, mit der Darboux sich ebenfalls schon 1872 beschäftigt hatte, und die inzwischen (1886) durch J. Weingarten (J. f. Mathematik C, S. 296) auf eine partielle $D_2 = o$ bei Gelegenheit einer anderen Frage reduziert war. Darboux entwickelt hier nun seine eigene höchst elegante Lösung, die unter Verwendung der Haupttangentenparameter sich wieder auf die der Laplaceschen Gleichung mit gleichen Invarianten

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta} = kz$$

reduziert. Daran schließt sich das interessante Kapitel von der merkwürdigen Gruppe der 12 Flächen und der Beweis, daß mit der Lösung des metrischen Problems der infinitesimalen Deformation für eine gegebene Fläche zugleich die für jede aus ihr durch Kollineation und Reziprozität erzeugte (so auch noch für die von Darboux als „inversion composée" bezeichnete Transformation) geliefert ist. Im weiteren Verlaufe wird das Gaußsche Deformationsproblem zu dem Abrollen einer Fläche auf einer anderen in Beziehung gesetzt und im Zusammenhang mit den Untersuchungen von A. Ribaucour über cyklische Systeme zu einer neuen Bestimmung der auf eine gegebene Fläche „abwickelbaren" Flächen verwendet. Auch das Problem der sphärischen Abbildung wird wieder aufgenommen, insbesondere in einem Falle explizit vollständig gelöst. Endlich (S. 282) werden die dreifach konjugierten Systeme, die Darboux schon als Verallgemeinerung der Lamé-Systeme in den Ann. École Norm. 1878 betrachtet hatte, bei denen jede Fläche von den beiden anderen nach Kurven mit konjugierten Tangenten geschnitten wird, untersucht, nebst vielen anderen Anwendungen, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

Nur ganz kurz können wir ebenfalls auf ein weiteres Werk von Darboux eingehen, das schon zwei Jahre nach der Vollendung der Leçons erschien, die Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes (1898). Dasselbe enthält vorzugsweise die Verallgemeinerung der Lamé-Systeme für n-Variable nebst vielen neuen Untersuchungen über solche Systeme, die zugleich isotherm sind, sowie die von L. Bianchi zuerst behandelten dreifachen Orthogonalsysteme, bei denen eine Schar aus Flächen konstanter Krümmung besteht. Der zweite Band des Werkes, wahrscheinlich für noch allgemeinere Untersuchungen über Lamé-Systeme in nicht-euklidischen Räumen bestimmt, ist nicht mehr erschienen, statt dessen aber 1910 eine zweite Auflage des ersten, für deren Inhalt auf das ausführliche Referat im Band 41 des Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik hier verwiesen sein möge.

Während die Theorie der Flächen von konstanter negativer Krümmung so große Fortschritte gemacht hatte, war die der Flächen konstanter positiver Krümmung zeitweilig in den Hintergrund getreten. Da zeigte C. Guichard 1899, daß die „Biegungsdeformationen" der Rotationsflächen zweiten Grades, insbesondere des Rotationsellipsoides, des Rotationsparaboloides, sowie auch des Paraboloides, von dem eine Erzeugende den Imaginärkreis berührt, von der Ermittelung von Flächen konstanter positiver Krümmung abhängig gemacht werden können. Guichards Untersuchungen knüpfen ebenfalls an das Rollen einer Rotations-F_2 auf einer ihrer Biegungsflächen B an. Das Rollen ist auf zwei Arten möglich, je nachdem es auf der einen oder anderen Seite von B geschieht. Bei jeder dieser Lagen hat die F_2 zwei Brennpunkte, bei der ersten Lage F_1 und F_2, bei der zweiten, die zu diesen in Bezug auf die Berührungsebene symmetrischen f_1 und f_2. Die vier Flächen (F_1), (F_2), (f_1), (f_2) haben konstante mittlere Krümmung und die Flächen, welche von den Mitten der kreuzweisen Verbindungslinien $F_1 f_2$, $F_2 f_1$ beschrieben werden, konstante positive Krümmung. Und der Schnittpunkt der Berührungsebene der Flächen F_2 und B mit der Axe der ersteren beschreibt dann eine zweite Biegungsdeformation der F_2 (C. R. C. XXVIII, 1899).

Durch diese Sätze richtete sich nun das Interesse auf die Deformation der Flächen zweiten Grades, d. h. auf die Möglichkeit, aus einer bekannten Biegungsdeformation derselben beliebig viele andere herzuleiten. Sie veranlaßten dann Bianchi, in ganz selbständiger Weise mittels seiner Ausbildung der Bäcklundschen Transformation systematisch die Biegungsdeformation der Rotations-F_2 im Zusammenhang mit den Deformationen der Kugel zu behandeln. Den Guichardschen Untersuchungen gegenüber aber konnte Darboux zeigen (Ann. École Norm. 3, XVI, S. 465, 1899), daß seine in den Leçons entwickelte Methode der rollenden Bewegung nicht allein die Ermittelung beliebig vieler solcher Deformationen für die Rotations-F_2 leistet, sondern auch für die allgemeine F_2, die nur in einem Punkte den Imaginärkreis berührt. Und so erstrecken sich seine Untersuchungen schließlich auf die allgemeinste Fläche zweiten Grades, bei denen das Deformationsproblem sich von gewissen isothermen Flächen als abhängig erweist, deren Differentialgleichung noch schwieriger zu behandeln ist, als die der Flächen konstanter Krümmung.

* * *

Als Sekretär der Pariser Akademie hat Darboux eine ganze Reihe von Reden zum Gedächtnis der aus dem Leben geschiedenen französischen Mathematiker M. Chasles, J. Bertrand, A. Serret, P. Serret, A. Mannheim, etc., auch über seinen Freund S. Lie gehalten. Namentlich aber haben wir noch zweier Vorträge allgemeinen Inhaltes zu gedenken, die im Bulletin veröffentlicht sind. Der erste, Étude sur le développement des méthodes géométriques, „gelesen" am 24. September 1904 in St. Louis, beginnt mit der Schilderung der Mongeschen Schule und deren Hauptträgern, Hachette, Brianchon, Dupin, Malus, Poncelet, Chasles, von denen Poncelet wegen seiner im Zusammenhange mit Gergonne entstandenen Einführung der dualistischen Transformation und den unbeschränkten Verwendung des Imaginären, das in Monges Arbeiten doch nur gelegentlich aufgetreten, besonders hervorgehoben wird. Mit hoher Anerkennung aber verbreitet Darboux sich über die Verdienste der deutschen Mathematiker J. Steiner, A. F. Möbius, J. Plücker, H. G. Graßmann, Chr. von Staudt. Plücker, der Erfinder der Methode der abgekürzten Bezeichnung und der homogenen Koordinaten, durch welche die projektiven und reziproken Verwandschaften, die Poncelet seinem Traité des propriétés projectives zu Grunde gelegt hatte, auch analytisch zu beherrschen vermögen, während Chasles und Steiner an Stelle der Analyse die Synthese setzen wollten,[1]) die allerdings unter den Händen von Chasles sowohl die Potentialtheorie als die der geodätischen Linien der Flächen zweiten Grades zu beherrschen vermag, erscheint ihm als der Begründer derjenigen Darstellungsform, welche Darboux selbst zu der seinigen gemacht hatte. Seinem Einflusse schreibt er die großartige Entwicklung der Geometrie zu, welche mit O. Hesse beginnend, unter dem Zusammenwirken der Invariantentheorie Cayleys und Sylvesters ihren Höhepunkt unter den Arbeiten von G. Salmon, S. Aronhold, A. Clebsch, P. Gordan, L. Cremona erreicht, während Plücker noch in seinen letzten Lebensjahren ein neues Gebiet der mathematischen Analyse eröffnet, die Liniengeometrie, durch welche das Dualitätsprinzip im Raum und überhaupt die Verwendung mehrfacher Mannigfaltigkeiten zum wirksamsten Ausdruck gelangte. Auch von Staudts Bedeutung[2]) wird gewürdigt in der Rede, von deren Inhalt wir einiges[3]) mitgeteilt haben, um zu zeigen, mit wie weitem vorurteilsfreiem Blick Darboux (ganz anders wie sein Vorgänger Chasles) auch namentlich die deutsche Mathematik anerkannte.

Die zweite Rede, Les origines des méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale, welche Darboux am 7. April 1908 auf dem vierten Mathematiker-Kongreß zu Rom hielt (Bull. 2, XXXII, 1908) trägt in ihrem zweiten Teil einen weit persönlicheren Charakter. Es ist als ob der 66 jährige Darboux sein eigenes ganzes Leben an der Hand der Differentialgeometrie vorüberziehen sieht. Am Schlusse der ersten Rede zeichnet er aber schon das Ideal des Geometers, als dessen glänzendes Beispiel er selbst zu betrachten ist, mit den Worten: „Le mathématicien n'est nullement une machine à déduire et calculer. Ses travaux mettent en jeu toutes les facultés de son esprit: la finesse, l'esprit d'invention, l'imagination lui sont peut-être plus nécessaires que l'ordre et la rectitude de son raisonnement“.

Aurel Voss.

---

[1]) Übrigens tritt auch bei Steiner in seinen Extremum-Arbeiten die Absicht hervor, die Variationsprobleme synthetisch zu behandeln und damit die antiken Methoden wieder aufzunehmen.

[2]) Vgl. Seite 28.

[3]) Der übrige Teil des Vortrages bezieht sich auf die Entwicklung der Geometrie mit Hilfe der Analysis.